

5. 群论初步

xiaoga@mail.ustc.edu.cn

P112

1.

(1)

解:

$\langle S, * \rangle$ 不是群。它不满足封闭性。

(4)

解:

$\langle S, * \rangle$ 是群, 且是交换群。

单位元是 γ 。

$$\alpha' = \delta$$

$$\beta' = \beta$$

$$\gamma' = \gamma$$

$$\delta' = \alpha$$

(6)

解:

$\langle S, * \rangle$ 是群, 且是交换群。

单位元是 1。

a 的逆元是 $a \cdot a' \equiv 1 \pmod{p}$ 的解。

4.

证明:

充分性:

$$(a * b)^2 = a^2 * b^2$$

$$\Rightarrow (a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)$$

$$\Rightarrow a * (b * a) * b = a * (a * b) * b$$

$$\Rightarrow b * a = a * b$$

必要性:

G 是交换群

$$(a * b)^2$$

$$= (a * b) * (a * b)$$

$$= a * (b * a) * b$$

$$= a * (a * b) * b$$

$$= (a * a) * (b * b)$$

$$= a^2 * b^2$$

7.

证明:

a 为二阶元, $a^2 = e \Rightarrow a = a'$ 。

反证法:

假设存在 $x \in G$, 使 $a*x \neq x*a$ 。

则 $x'*a*x \neq a$ 。

而 $(x'*a*x)^2 = x'*a*x*x'*a*x = e$,

则 $x'*a*x$ 也是二阶元, 矛盾。

\therefore 原命题成立。

9.

证明:

充分性:

$\forall a, b \in H, a*b' \in H$

则

$a \in H \Rightarrow a*a' = e \in H$

$e, a \in H \Rightarrow e*a' = a' \in H$

$a, b \in H \Rightarrow a, b' \in H \Rightarrow a*(b')' = a*b \in H$

$\therefore \langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

必要性:

$\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群

则

$\forall a, b \in H \Rightarrow a, b' \in H \Rightarrow a*b' \in H$ 。

10.

证明:

$H = \{a \mid a \in G, \forall g \in G, a*g = g*a\}$

则

$\forall g \in G, e*g = g*e, \therefore e \in H$ 。

$\forall a, b \in H, (a*b)*g = a*(b*g) = a*(g*b)$
 $= (a*g)*b = (g*a)*b = g*(a*b), \therefore a*b \in H$ 。

$\forall a \in H, a*g = g*a \Rightarrow g'*a' = a'*g', \therefore a' \in H$

$\therefore \langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

11.

证明:

$H \leq G, K \leq G$

$e \in H, e \in K \Rightarrow e \in H \cap K$

$a \in H \cap K \Rightarrow a \in H, a \in K \Rightarrow a' \in H, a' \in K \Rightarrow a' \in H \cap K$

$a, b \in H \cap K \Rightarrow a*b \in H, a*b \in K \Rightarrow a*b \in H \cap K$

$\therefore H \cap K$ 是 G 的子群。

$H \cup K$ 不一定是 G 的子群。

当 $H \subseteq K$ 或 $H \supseteq K$ 时, $H \cup K$ 为 K 或 H , 是 G 的子群。
否则, 不一定, 例如取 a, b 使 $a \in H, a \notin K, b \notin H, b \in K$
不能确定 $a * b \in H \cup K$ 是否成立。