

3. 映射

xiaoga@mail.ustc.edu.cn

P64

6. 设 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $|B|=m$, $S(B)$ 表示集合 B 中元素构成的全体有序 n 数组, 即

$$S(B)=\{(b_{i1},b_{i2},\dots,b_{in})|b_{ij} \text{ 属于 } B, 1\leq j\leq n\}$$

以 F 表示从 A 到 B 的映射全体. 对于 F 中的每个映射 f , 令

$$g(f)=(f(a_1),f(a_2),\dots,f(a_n))$$

证明: g 是从 F 到 $S(B)$ 的双射, 并由此证明从 A 到 B 的映射有 m^n 个.

证明:

任取 $S(B)$ 中一元素 $(b_{i1},b_{i2},\dots,b_{in})$,

令 f 为

$$a_1 \rightarrow b_{i1}, a_2 \rightarrow b_{i2}, \dots, a_n \rightarrow b_{in}$$

则 f 为 $S(B)$ 在 F 中的原象

\therefore 任一 $S(B)$ 的元素有原象, g 为满射;

设 f_1, f_2 都是 $(b_{i1},b_{i2},\dots,b_{in})$ 的原象

则 $f_1=f_2$

$\therefore S(B)$ 中的任一元素都有唯一原象, g 为单射;

$\therefore g$ 为双射。

$$\therefore |F| = |S(B)| = |B|^n = m^n$$

\therefore 从 A 到 B 的映射有 m^n 个

8.

解:

当 a 是单射时,

$$\forall b \in a(\tilde{A})$$

则 $b \in T$

$$\therefore a \text{ 是单射 } \therefore b \notin a(A)$$

$$\therefore b \in a(\tilde{A})$$

$$\therefore a(\tilde{A}) \subseteq a(\tilde{A})$$

当 a 是满射时,

$$\forall b \in a(A)$$

则 $b \notin a(\tilde{A})$

$$\therefore a \text{ 是满射 } \therefore b \in a(\tilde{A})$$

$$\therefore a(A) \subseteq a(\tilde{A})$$

当 a 是双射时,

$$a(A) = a(\tilde{A})$$

11.

解:

若 f 是双射

若 g 不是满射, 则必存在 f 中某一象不是 $f \circ g$ 中的象,

则 $f \circ g \neq I_S$, 矛盾

所以 g 是满射;

若 g 不是单射, 则 $f \circ g$ 不是单射,

又 I_S 是单射, 矛盾

所以 g 是单射;

综上得出 g 为双射。

$\therefore f \circ g = I_S$, f 和 g 都是双射

$\therefore g = f^{-1}$

$\therefore g \circ f = f^{-1} \circ f = I_S$, 矛盾。

13. 把下列置换写成不相交的轮换之积。

(2) (72815) (21) (476) (12)

解:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5$

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 8$

$3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3$

$4 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 7 \rightarrow 2$

$5 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 7$

$6 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4$

$7 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow 6$

$8 \rightarrow 8 \rightarrow 8 \rightarrow 8 \rightarrow 1$

\therefore 可写成 (1576428)

15. 求下列置换的阶。

(2) (163) (1357) (67) (12345)

解:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 5$

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 7$

$5 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

$6 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 6$

$7 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow 3$

\therefore 可写成 (125) (347)

阶=[3, 3]=3.

16. 证明任何 n 元置换可以表示成 (12), (23), ..., (n-1, n) 的乘积。

证明:

任取一对换 $(a_1 a_2)$

$\therefore (a_1 a_2)$ 与 $(a_2 a_1)$ 相同

不妨设 $a_1 < a_2$

则 $(a_1 a_2)$

$$= (a_1 a_1+1)(a_1+1 a_1+2) \dots (a_2-2 a_2-1)(a_2-1 a_2)(a_2-2 a_2-1) \dots (a_1+1 a_1+2)(a_1 a_1+1)$$

\therefore 任意对换可表示为 $(12), (23), \dots, (n-1, n)$ 的乘积。

又

任意置换可表示为不相交的轮换之积

任意轮换可表示为对换之积

\therefore 任何 n 元置换可以表示成 $(12), (23), \dots, (n-1, n)$ 的乘积。

18. 如果 $f+g=g$, 求证

$$(1) f \cdot g + \bar{f} = 1$$

证明:

$$\begin{aligned} & f \cdot g + \bar{f} \\ &= f \cdot (f + g) + \bar{f} \\ &= f \cdot f + f \cdot g + \bar{f} \\ &= f + \bar{f} + f \cdot g \\ &= 1 + f \cdot g \\ &= 1 \end{aligned}$$

19. 写出下列 2 元开关函数的小项表达式。

(1) 恒为 1 的函数。

解:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2) \\ &= x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \end{aligned}$$