2. 数论初步

xiaoga@mail.ustc.edu.cn

P41

3. 求 x 和 y 使得

（1）314x+159y=1

解：

先求（314，159）

314=159・1+155

159=155・1+4

155=4・38+3

4=3・1+1

3=1・1

∴（314，159）=1|1，方程 314x+159y=1 有解

1 = 4-3・1=4-（155-4・38）=-155+4・39=-155+(159-155・1)・39

=159・39-155・40=159・39-(314-159・1)・40=-314・40+159・79

∴一组特解为 x0=-40，y0=79

通解为 x=-40+159t，y=79-314t （t 为整数）

5. 证明：若对于某个m有 10|（3^m+1）.则对所有的n>0,10|(3^{m+4n}+1).

证明：

$3^{m+4n}+1=3^{m+4n}+3^{4n}-3^{4n}+1=3^{4n}(3^m+1)-(3^{4n}-1)=3^{4n}(3^m+1)-(81^n-1)$

∵10|（3^m+1）

∴10|3^{4n}（3^m+1）

又 10|（81^n-1）

∴10|3^{4n}（3^m+1）-（81^n-1）

即对所有的n>0,10|(3^{m+4n}+1)。

10．求下列方程的负整数解

（1）6x-15y=51

解：

（6，15）=3，3|51，∴6x-15y=51 有整数解

其一组特解为 $x_0=11$，$y_0=1$.

通解为 $x=11-5t$，$y=1-2t$

要 $x<0$ 且 $y<0$，则 $t>2$

∴$6x-15y=51$ 的负整数解为 $x=11-5t$，$y=1-2t$ $(t>2)$.

17. 证明：

（1）$10^{k}\equiv(-1)^{k}\pmod{11}$，$k=0，1，2，\cdots$

证明：

$10^{k}=(11-1)^{k}$

根据二项式定理，展开的前k项可被 11 整除，最后一项为 $(-1)^{k}$

∴$10^{k}\equiv(-1)^{k}\pmod{11}$，$k=0，1，2，\cdots$

（2）推出一个整数能被 11 整除的判别法

解：

设 a 为 n 位整数

$a=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+a_2\cdot 10+a_1=\sum a_i\cdot 10^{i-1}$

∵$(a_i,11)=1$

∴ $a_i\cdot 10^{i-1}\equiv a_i\cdot(-1)^{i-1}\pmod{11}$

∴$a\equiv\sum a_i\cdot(-1)^{i-1}\pmod{11}$

故 a 奇数位上数码之和与偶数位数码之和的差能被 11 整除时有 $11|a$。

18(3).解同余方程：$4x\equiv 6\pmod{18}$

解：

∵$\gcd(4,18)|6$,

∴该方程有通解 $x=x_0+9t\pmod{18}$，其中 $0\leqq t\leqq 1$, x_0 是同余方程 $2x\equiv 3\pmod{9}$的特解。

易知 $x_0=6$,

该同余方程的解为 $x=6，15\pmod{18}$.

19（4）解下列同余方程组

$2x \equiv 1$（mod5）

$3x \equiv 2$（mod7）

$4x \equiv 1$（mod11）

解：

由 gcd(2,5)=1 可知：$2x \equiv 1$（mod5）等价于 $x \equiv 3$（mod5）。

由 gcd(3,7)=1 可知：$3x \equiv 2$（mod7）等价于 $x \equiv 3$（mod7）。

由 gcd(4,11)=1 可知：$4x \equiv 1$（mod11）等价于 $x \equiv 3$（mod11）。

令 $M=5 \cdot 7 \cdot 11=385$，由定理 2.9

$11b1 \equiv 1$（mod 5）

$55b2 \equiv 1$（mod 7）

$35b3 \equiv 1$（mod 11）

b1=3，b2=6，b3=6

a1=3，a2=6，a3=3

$\therefore x=77 \cdot 3 \cdot 3+55 \cdot 6 \cdot 3+35 \cdot 6 \cdot 3=3$ (mod 385) 是方程组的解